

数字信号与图像处理
aka 信号处理的数学导引
The Mathematical Tour of Signal Processing

张思容

zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
School of Mathematics and Systems Science, Beihang University

March 3, 2017

Chapter 1: 信号与系统的数学表示

Representation of signals and systems

1 傅立叶王国 Fourier Kingdom

- 理想信号
- 傅立叶变换

2 系统与算子

- LTI线性时不变系统
- Hilbert 空间

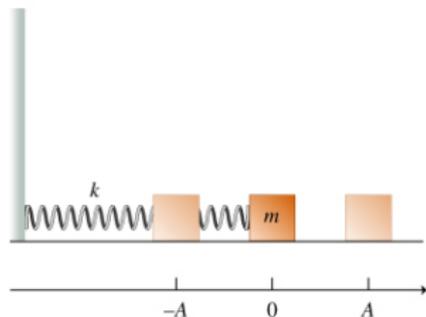
3 抽样与重构

- 抽样
- 重构 reconstruction

阅读章节：清华教材 1.1-1.8;

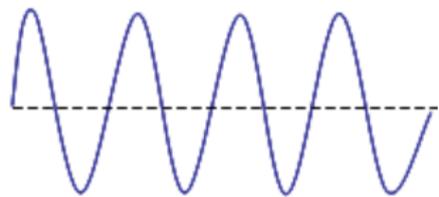
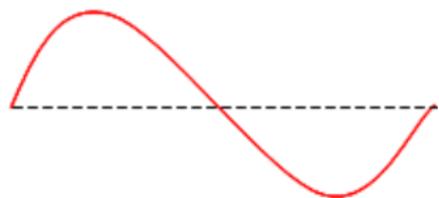
参考书：傅里叶分析

简单调和振动



- Hooke定理: $F = -ku$
- Newton定理: $F = ma = m\ddot{u}$
- 方程 $m\ddot{u} = -ku$
- 解: $u(t) = A \cos(ct - \phi)$, 称其中 $c = \sqrt{k/m}$ 为频率, A 为振幅, ϕ 为相位。
- A 和 ϕ 由初值决定。
- 有外力 f 的振动方程求解? $m\ddot{u} + ku = f$ 参考非齐次线性方程求解(齐次解+特解).
- 一条线上多个节点的简单振动? 产生类似冲浪的效果: 水上下振动, 人平行波动。

一维波方程



- 声音：是声带振动，压迫空气振动，产生的波。空气是媒介！
- 物理定律：Newton定理： $F = ma = \rho h \ddot{y}(t)$
- 方程 $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 简化可取 $\rho/\tau = 1$; ***解一：D'Alembert

$$u(x, t) = F(x + t) + G(x - t).$$
- 解二：分离变量 $u = \mu(t)\nu(x)$,

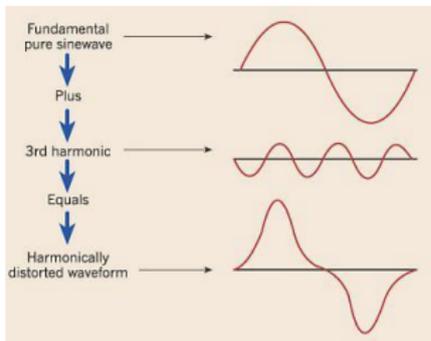
$$\frac{\ddot{\mu}(t)}{\mu(t)} = \frac{\ddot{\nu}(x)}{\nu(x)} = \lambda$$

$$\ddot{\mu}(t) - \lambda\mu(t) = 0, \ddot{\nu}(x) - \lambda\nu(x) = 0$$

$$u(x, t) = (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx,$$

$$\lambda = m^2.$$
- 左图： $m = 1$ 基调 fundamental tone, $m = 2$ 第一overtone(第二harmonic), ...

波的叠加与傅立叶级数



- $[0, \pi]$ 上波动方程的一般解: $u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx$. 简化假设 $u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0$.
- 初值条件: 设波的起始状态 $u(x, 0) = f(x)$, 存在解 $\leftrightarrow f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$
存在解的必要条件 $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx$.
- 推广到 $[-\pi, \pi]$, 奇函数
 $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$, 偶函数
 $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos mx$,
- 任一函数 $F(x) = f(x) + g(x)$, 是否 $F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}$?
注: 引入 e^{ix} 是为了简化表示, 本质还是实函数。

傅立叶的远见:

Joseph Fourier(1768-1830)



Question:

任意一个连续或不连续的函数(信号)是否可以表示为一列连续(光滑三角)函数的和?



Answer:

D'Alembert, Euler: 不一定!

J.Fourier: 一定! 数学不严密。



Remark

Joseph Fourier: 参与拿破仑的埃及远征; 发现温室效应。

历史注记

Lennart Carleson(1928-)



Theorem (点收敛, Carleson 1966)

任意一个平方可积函数(L^2)的傅立叶级数几乎处处收敛。

- Richard Hunt推广到 $L^p, p > 1$.
- Kolmogorov(1903-1987)构造一个绝对可积(1924)函数的傅立叶级数处处不收敛。
- Kahane,Katznelson: 任一零测度集, 存在一个连续函数在上面的傅立叶级数处处不收敛。

理想信号的数学模型

任一理想信号 $f(t)$ 必须是傅里叶级数的和。定义傅里叶级数要求傅里叶系数存在。一般有 $\hat{f}(n) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx} dx$ 。

- 数学分析的函数: 光滑函数或分段光滑函数; $C^k(R)$
- 实变函数中的函数: $L_p(R)$
注意: Lebesgue 积分和 Riemann 积分的差别。例子 $f(t) = 1, t$ 是有理数, 其他为 0.
- 信号基本要求: Lebesgue 绝对可积。 $L^1(R), \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty$.
- 物理信号:
稳定信号: $L^1(R)$, 局部稳定信号 $L_c^1([0, T])$
能量(有限)信号: $L^2(R)$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$;
功率信号(局部能量有限) $L_c^2([0, T]), \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\int_0^A |f(t)|^2 dt}{A} < +\infty$, 比如常见的周期信号。

L^1 上傅立叶变换

Definition (傅立叶变换)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Proposition

- ① 平移 $f(x+h) \rightarrow \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}$
信号的延迟
- ② 放大 $f(\lambda x) \rightarrow \lambda^{-1}\hat{f}(\lambda^{-1}\xi)$
信号的多普勒效应(时间伸缩)
- ③ 卷积 $\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
信号的调制:
- ④ 微分 $f'(x) \rightarrow 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$
用途: 求解微分方程比如热传导方程。
- ⑤ 傅立叶逆变换 $\mathcal{F}^*(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi$; 注记: 一般稳定信号的傅里叶变换函数的逆变换不一定存在!

周期函数的傅立叶级数

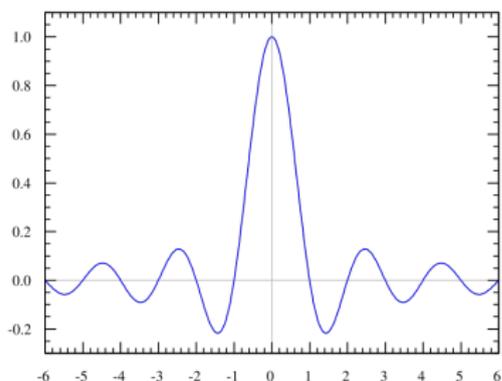
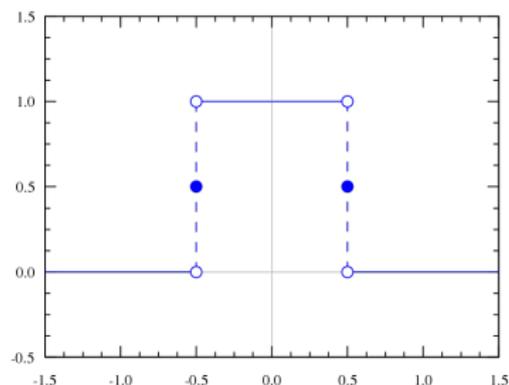
2π 的周期函数有傅里叶级数 $f(t) \sim \sum \hat{f}(n)e^{int}$;
其中 $\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt$ 。

Proposition

- 1 平移和放大: 与光滑函数类似
- 2 定义周期卷积 $(f * g)(\xi) = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)ds$
有 $\widehat{(f * g)}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$
- 3 傅立叶逆变换即傅里叶级数和, $\mathcal{F}^*(t) = \sum \hat{f}(n)e^{int}$;
如果级数收敛, 有逆定理 $\mathcal{F}^*\mathcal{F}(f) = f$ 。

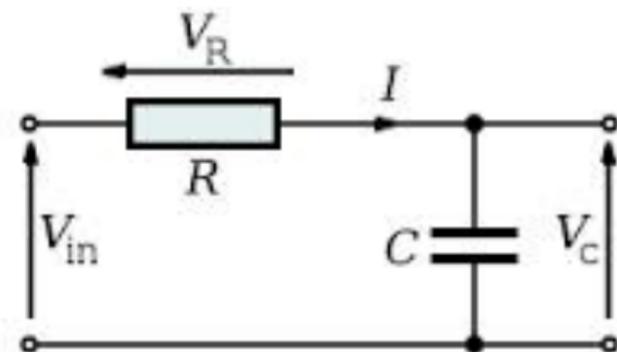
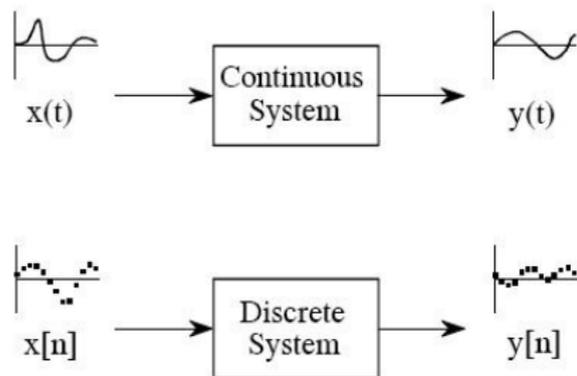
注记: 傅里叶级数收敛有很多判定法则。存在Gibbs现象(后面有)。

简单例子：矩形波



- 作为周期函数的矩形波: $G_2(t) = 1$, 周期 $T = 2\pi$
傅立叶展
开 $G_2(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_n \frac{2}{\pi} \text{Sinc}(n) \cos nt$.
- 傅立叶展开的复数形式:
 $G_2(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_n \frac{1}{\pi} \text{Sinc}(n) e^{-int}$
- 作为有限区间函数的矩形波: $G_2(t) = 1$ 。
傅立叶变换 $\widehat{G}_2(w) = 2\text{Sinc}(w)$.
- 特别傅立叶系数 $F_n = \widehat{G}_2(n)/(2\pi)$

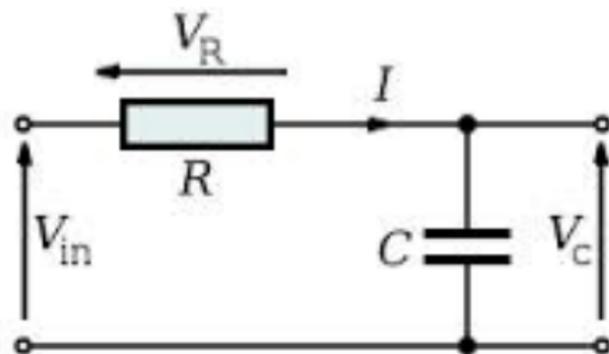
信号变换与算子



一个系统 H 是一个函数空间的算子(或信号变换)。 $H: x(t) \rightarrow y(t)$
 常见信号运算都是算子。

- 平移算子: $T_h(f(t)) = f(t - h)$?
- 反射算子: $R(f(t)) = f(-t)$; ?
- 伸缩算子: $S_a(f) = af(at)$; ?
- 乘积算子: $M_g(f) = f(t)g(t)$, 卷积算子: $C_g(f) = f * g$?
- 微分与积分算子: $D(f) = f'$, $I(f) = \int f$?

LTI系统与RC电路



模拟电路的基本结构:RC circuit 输入 $x(t)$,输出 $y(t)$ 满足 $y(t) + y'(t)(RC) = x(t)$ 解
 $y(t) = \int_0^{\infty} h(t-s)x(s)ds, h(t) = e^{-t/RC}, t \geq 0.$

- 线性系统: $H(ax + by) = aH(x) + bH(y)$
- 时不变系统: $H(x(t-k)) = y(t-k)$ 信号处理对象 \rightarrow 线性时不变算子: LTI系统!

注: 卷积系统是LTI系统。

- 稳定系统: BIBO稳定系统 $x(t)$ 有界则 $y(t)$ 有界;
- 因果系统: $y(t_0)$ 依赖 $x(t), t < t_0$. 即系统不能预测。

LTI系统和卷积算子

LTI系统完全由 $h(t)$ 决定。

- 卷积的线性,与平移交换 \rightarrow 线性时不变
- $h(t) = 0, t < 0 \rightarrow$ 因果系统;
- $\int |h(t)| < \infty \rightarrow$ BIBO稳定系统;
- 频率响应: LTI系统不改变纯频率信号!
记 $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$,则输出信号频率 $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ 称 $|H(\omega)|$ 为幅度频率响应; $\arg(H(\omega))$ 为相位频率响应。
特别RC电路有 $H(\omega) = 1/(1 + i2\pi RC\omega)$.
- 一般经典信号系统主要应用于频率的处理,称为模拟滤波器。
分类:低通(lowpass),高通(highpass),带通(bandpass),带阻(bandstop),全通(allpass)等。对应不同的 $|H(\omega)|$ 函数。

信号的空间

主要问题: 物理理想信号的数学对象?

- 线性空间 V : 无穷维 $C(a, b)$
- 线性赋范空间: $\|v\|$ 满足三角不等式; l^p, L^p ;
完备的线性赋范空间: Banach 空间 \rightarrow 有信号的大小;
- 线性内积空间: $\langle V, W \rangle$ (正定矩阵), 比如 l^2, L^2 ;
完备的线性内积空间: (可数基) Hilbert 空间; \rightarrow 信号的距离和广义信号
存在可数正交基; \rightarrow 可以有限逼近, 最小二乘法。

Hilbert空间与积

Definition (积: $\langle x, y \rangle$)

满足

- ① $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ② $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- ③ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $\langle x + y, w \rangle = \langle x, w \rangle + \langle y, w \rangle$

诱导范数: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Hilbert空间: 线性积空间且范数定义的极限是完备的(巴拿赫空间)。

Definition (正交基)

Hilbert空间的一组基 e_i 称为正交基: 如果满足 $\|e_i\| = 1$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.

柯西许瓦茨不等式

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

能量有限的信号空间: L^2, l_2

能量有限的信号: $E(f) = \int f(x)^2 dx < \infty, f(x) \in L^2$.
 或者离散信号 $E(f(n)) = \sum f(n)^2, f(n) \in l^2$ 。

Theorem (L^2 的正交基)

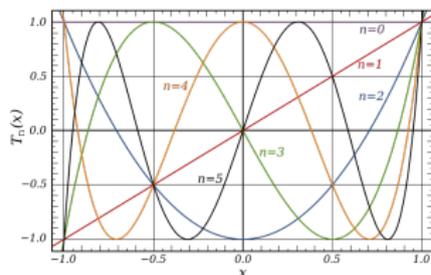
$e_n(x) = e^{inx}$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 的一组正交基,
 且傅立叶级数是最佳逼近 $\|f - S_N(f)\| \leq \|f - \sum_n c_n e_n\|$
 特别它是完备正交基。(存在一致逼近)

Theorem (平方可积收敛)

$f \in L^1(a, b)$, 当 $N \rightarrow \infty$, $\int_a^b |S_N(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$.
 有 Parseval 等式 $\sum_n |\hat{f}_n|^2 = \|f\|^2$.
 特别有 Riemann-Lebesgue 定理: $|n| \rightarrow \infty, \hat{f}(n) \rightarrow 0$.

注记: 一般考察 Hilbert 空间有可数个完备正交基, 是有限维欧几里德空间的最佳推广。

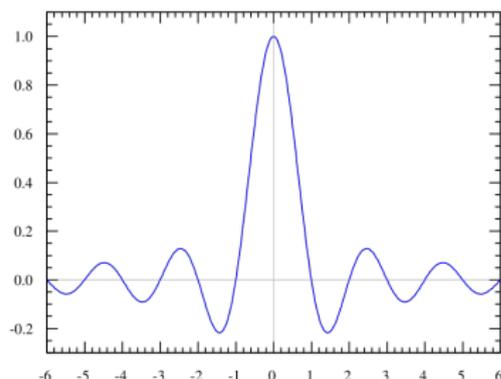
L^2 的正交基



- 多项式基正交化: $t^i : i = 1, 2, \dots \rightarrow$ Legendre多项式 $\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$.
- (左边图)切比雪夫多项式 Chebyshev $T_n(t) = \cos(n \arccos t), n = 0, 1, 2, \dots - 1 \leq t \leq 1$
- Bessel 函数: 来源于二维对称振动方程(鼓). $r^2 B'' + rB' + \lambda r^2 B = n^2 B$ 其中 $B(r)$ 的沿轴向的振动, r 是半径, λ 是鼓的频率, n 是Bessel函数的阶。一般Bessel函数记为 $J_n(\lambda_k r)$.

典型信号

- 指数信号 $x(t) = Ae^{bt}$, $b \in C$
周期信号: (正弦与余弦信号)
- 单位信号: 单位矩形信号 $G_1(t)$ (方波脉冲), 单位阶跃信号 $u(t)$ (方波($SW(t)$)), 单位斜变信号 $R(t)$ (三角波)
关系: $R(t) = \int u(t)$.
- 特殊信号: 抽样信号 $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$,
MATLAB: *sinc*函数。



δ 函数

单位冲激信号的不同定义:

- ① 方波的导数: $\delta(t) = SW'(t) = 4/\pi(\cos t + \cos 3t + \cos 5t + \dots)$.
不收敛!
- ② 在一点的力: $u'' = \delta(t)$, 方程的解为 $u(t) = -R(t - a) + ct + d$;
参见: Green函数。由不同 δ 函数的解可以得到 $u'' = f$ 的通解!
- ③ 狄拉克定义: $\int \delta(t) dt = 1, \delta(t) = 0, t \neq 0$.
抽样特性 $\int \delta(t - t_0)x(t) = x(t_0)$.
- ④ 线性泛函: $\delta : H \rightarrow R, \delta(f(t)) = f(0)$.
- ⑤ 函数逼近: 方波脉冲的逼近; $\delta(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{G_s(t)}{s}$
高斯函数的逼近。

傅立叶变换: Schwartz空间到 L^2 空间*****

关键结果:

- 1 Schwartz 空间在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密;
- 2 傅立叶变换 \mathcal{F} 是Schwartz 空间上的正交(可逆)变换; $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
- 3 \mathcal{F} 存在从Schwartz 空间到完备空间 $L^2(\mathbb{R})$ 的扩张。

Theorem (L^2 空间的傅立叶变换)

\mathcal{F} 给出 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个正交(等距)变换。

- 1 $\hat{\hat{f}} = f$;
- 2 $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
- 3 $\|f\| = \|\hat{f}\|$

注记: 可以进一步推广到广义函数(线性泛函).

广义信号***

Remark (广义信号的傅立叶变换)

一般的 C_c^∞ 上的线性泛函称为分布(*distribution*).看作可积函数定义的泛函的推广。称为广义函数。

广义函数的傅立叶变换: 对任何函数 $x(t) \in S$, $\langle \hat{f}, x(t) \rangle = \langle f, \widehat{x(t)} \rangle$

- 复指数信号 $x(t) = e^{-at}u(t)$
傅立叶变换 $X(w) = \frac{1}{a+iw}$
- 符号函数 $sign(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at}$
傅立叶变换 $SIGN(w) = \frac{2}{iw}$.
- 单位冲激函数 $\delta(t), \widehat{\delta} = 1$
特别 $\widehat{1} = 2\pi\delta(t)$.
- 单位阶跃函数 $u(t) = 1/2 + sign(t)$,
 $\widehat{u(t)} = \pi\delta(w) + \frac{1}{iw}$.

连续信号LTI系统的模型***

Remark

傅立叶王国：一般的能量信号可以看成 $L^2(0, 2\pi)$ 或 $L^2(\mathbb{R})$ 的函数。更广义的：能量信号属于一个Hilbert空间。

线性时不变系统(LTI):是Hilbert空间的一个线性算子且与平移算子可交换。

Theorem (LTI系统基本结论)

线性时不变系统 \mathcal{H} 完全由单位冲激信号 $\delta(t)$ 的冲激响应 $h(t)$ 决定。且 $\mathcal{H}(x(t)) = h(t) * x(t)$ 。(所有LTI是个卷积系统)。

L^2 有很多正交基，对应的有不同的正交分解，为什么用三角函数基？为什么用傅立叶变换？

Theorem (LTI系统特征向量)

三角函数基是所有线性时不变系统 \mathcal{H} 的公共特征向量。

单位冲激信号与LTI系统的卷积解释***

- δ_0 是一个线性泛函(可能无界!)。 $\langle \delta_0, x(t) \rangle = x(0)$
是否有Riesz 表示定理? $\langle \delta_0, x(t) \rangle = \langle z(t), x(t) \rangle$
- 一般的函数表示有 $x(t) = \langle \delta_{t-s}, x(s) \rangle$.
- 记 $\mathcal{H}(x(t)) = y(t)$, 则 $y(t) = \mathcal{H}(\langle \delta_{t-s}, x(s) \rangle) = \langle \mathcal{H}(\delta_{t-s}), x(s) \rangle$
- 一般的可以定义 $\langle \mathcal{H}(\delta), x(t) \rangle = \langle \delta, \mathcal{H}(x(t)) \rangle$
假设 $\mathcal{H}(\delta)$ 是有界泛函!, 由Riesz 表示定理。 $\langle \mathcal{H}(\delta), x(t) \rangle = \langle h(t), x(t) \rangle$.
- 设 $T_s(x(t)) = x(t-s)$, 则 $H \circ T_s = T_s \circ H$.
特别 $y(t) = \langle T_s(h(t)), x(s) \rangle = \langle h(t-s), x(s) \rangle = h(t) * x(t)$.

Remark

一般的 $\delta(t)$ 看成广义函数(*distribution*), 可以求导, 积分等。

指数函数是所有LTI系统的特征向量***

Theorem (有界正规算子的谱)

*Hilbert*空间上可以互相交换的对称(正规)算子族(至少存在一个有界算子)存在共同的特征向量。

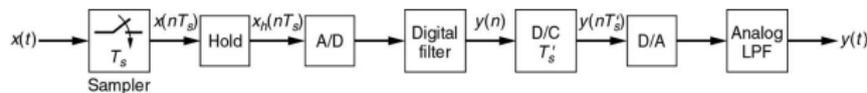
正规算子(normal operator): $N \circ N^* = N^* \circ N$ 其中 $\langle Nx, y \rangle = \langle x, N^*y \rangle$ 。

Corollary

所有的LTI系统是卷积系统.卷积可以交换,且与平移算子 T_s 可交换,所以存在一组共同的特征向量。特别有 $h(t) * e^{ist} = H(s)e^{ist}$ 。

- 卷积算子可交换 $h_1 * h_2 * x = h_2 * h_1 * x$
- 卷积与平移算子 T_s 可交换;
- 满足 $h * e = \lambda e$, $T_s(e) = t_s e$,仅有指数函数满足该方程!
- 直接验证 $h(t) * e^{ist} = H(s)e^{ist}$ 。

从连续信号到离散信号



- 连续(或模拟)系统的实现: $H(\Omega)$ 由固定类函数逼近; 有固定电路实现(RLC), (专业软件设计);省电!
问题: 存在物理限制(太高频?);设计复杂;不精确(物理误差);
- 离散(或数字)系统的实现: $H(\Omega)$ 由有理函数逼近,无限精确;滤波器由电脑软件实现,无物理限制; 增加AD转换,DA转换器;
问题:耗电,速度慢;抽样信号的限制;
- AD转换器: 理想脉冲抽样 $x(t) \rightarrow x(nT_s)$, T_s 是抽样周期; 实际可能是矩形脉冲抽样;
- DA转换器: 理想插值公式可以完全重构; 实际用低通滤波器.

主要问题: 存在完全重构的插值公式吗? $x(n) \rightarrow x(t)$?

一般要限制 $x(t)$ 的函数空间,比如多项式?

抽样信号及混叠aliasing

抽样与频率变化:

- 抽样频率: 间隔时间 T_s 选取样本 $x(nT_s)$. T_s 是抽样周期(秒), $f_s = 1/T_s$ 是抽样频率(单位HZ), $\omega_s = 2\pi/T_s$ 是抽样角频率(或抽样频率).
- 信号抽样频率: 设真实信号频率 f, ω , 则抽样后数字信号频率 $f' = f/f_s, \omega' = 2\pi\omega/\omega_s = \omega T_s$
- 常用归一化频率: 为简化分析, 设 $T_s = 1, \omega_s = 2\pi$, 则抽样信号记为 $x(n)$, 数字信号频率属于 $[0, 2\pi]$,

抽样信号的混叠aliasing

- 设真实信号 $x(t) = \cos \omega t$, 抽样信号 $x(n) = \cos \omega' n$
- $\omega_s = 2\omega, x(n) = \cos \pi n$, 是最高频率信号, 称为Nyquist频率;
- $\omega_s = 4\omega, x(n) = \cos \pi/2n$, 是过抽样oversampling
- $\omega_s = 4/3\omega, x(n) = \cos 3\pi/2n$, 是欠抽样undersampling
- ***两个抽样一样 $1, 0, -1, 0, \dots$ 称为混叠aliasing(高频被低频表示);
- 特别: $\sin \pi n$ 与 $\sin 0$ 混叠。Nyquist频率对正弦信号不够, 一般要求信号的最大频率 $\omega \leq \pi/T_s$, 即抽样后信号频率 $\omega' \leq \pi$.

抽样的数学解释

- 连续函数和离散序列的差别？ Hilbert 空间，谱空间取三角正交基是正交同构变换。
连续谱和离散谱 \rightarrow 类似与傅里叶变换和傅里叶级数的差别来源于周期函数还是稳定函数。
- 稳定函数的周期化 $\phi(t) = \sum_n s(t+n)$, 设周期为1, 是局部稳定函数。
有 $\hat{\phi}(n) = \hat{s}(n)$, 傅里叶级数 $\phi \sim \sum \hat{s}(n)e^{2\pi n t}$
- 泊松和公式 Poisson Sum: 如果 $\phi(t)$ 傅里叶级数收敛, 有傅里叶逆定理 $\sum_n s(t+n) = \sum_n \hat{s}(n)e^{2\pi t n}$, 特别 $t=0$, 有泊松和公式 $\sum_n s(n) = \sum_n \hat{s}(n)$
- 类似有频率域上的泊松和公式。 $s(t) \rightarrow \hat{s}(w)$
稳定谱函数的周期化 $\phi(w) = \sum_n \hat{s}(w+n)$, 有 $\hat{\phi}(n) = \hat{s}(-n)$,
傅里叶级数 $\phi \sim \sum \hat{s}(n)e^{-2\pi n w}$

Shannon 插值公式(完全重构)

Theorem (NyquistShannon定理)

抽样信号可以完全恢复原连续信号必须满足:

(1)原信号是频率范围(频带)有限的,设最高频率 w_c ;

(2)抽样频率至少是最高频率的两倍。 $w_s \geq 2w_c$.

称 $2w_c, 2f_c$ 为奈奎斯特率, 称采样率 w_s 的一半为奈奎斯特频率。

Shannon 插值公式: 设抽样信号的高频频率(归一化后)为

零 $\hat{s}(w) = 0, |w| \geq \pi$, 则 $s(t) = \sum s(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$

注记: 电话: 8kHz (通话3.4kHz); CD: 44.1kHz (声音20kHz)

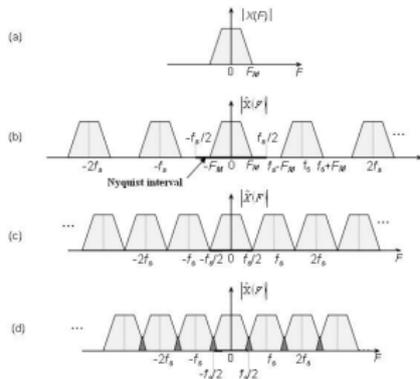
- 构造稳定谱函数的周期化 $\phi(w) = \sum_n \hat{s}(w + n)$,
 $\phi \sim \sum \hat{s}(n) e^{-2\pi n w}$
- 理想低通滤波器 $T(w) = 1, -0.5 < w < 0.5$
有 $\phi(w) T(w) = \hat{s}(w)$, 特别 傅里叶逆定理 $s(t) = \int_R \hat{s}(w) e^{2\pi t w}$
- 直接计算 $s(t) = \int_R \sum_n \hat{s}(n) e^{-2\pi n w} T(w) e^{2\pi t w}$, 可得定理。

抽样信号的混叠现象aliasing

理想重构信号 $s(t) = \sum s(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$

一般重构信号 s_0 , 有

$$\hat{s}_0(\omega) = \phi(\omega) T(\omega) \neq \hat{s}(\omega)$$



- undersampling: $\hat{s}_0(\omega) = \sum \hat{s}(\omega + n) T(\omega)$
产生混叠现象: $\hat{s}(1 - \omega)$ 和 $\hat{s}(\omega)$ 混合.

- oversampling: 可以取更小的截断函数 $T_0(\omega) = 1, -1/2 * B < \omega < 1/2 * B, B < 1$;
构造光滑函数 $T_1(\omega)$ 是 $T_0(\omega)$ 的延拓到 $[-0.5, 0.5]$, 则重构信号 $s_0(t)$ 的级数和收敛更快。 $(s(t)$ 收敛速度 $\sim 1/n$).

网页: www.didkovsky.com/nyu/samplingtheorem/SamplingApplet.html

抽样定理的物理解释

抽样定理证明***: 周期函数的离散谱

Proposition (Dirac comb的变换)

Dirac comb $\Delta_{T_s}(t) = \sum_n \delta(t - nT_s)$ 是离散的周期序列。 $\omega_s = 2\pi/T_s$, 有傅立叶展开 $\Delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s} \sum e^{n\omega_s t}$.

傅立叶变换: $\widehat{\Delta_{T_s}(t)} = \omega_s \Delta_{\omega_s}(\omega)$.

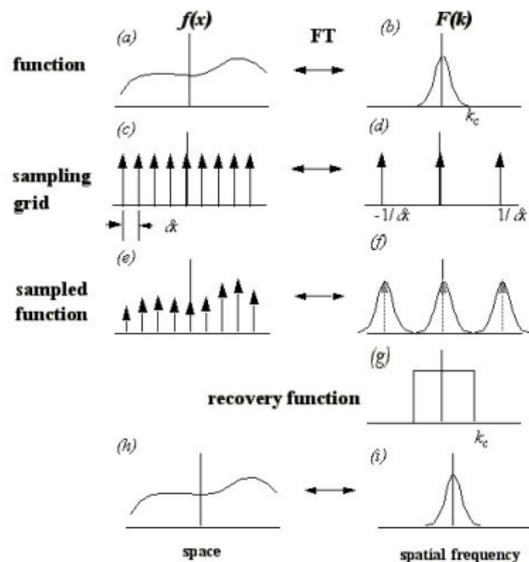
- 设周期函数在周期 $[0, T_s]$ 中定义为 $f_0(t)$;
- 周期函数的数学表示: $f(t) = \sum f_0(t - nT_s)$
 $f(t) = f_0(t) * \Delta_{T_s}(t)$

Corollary (周期函数的离散谱)

$$\widehat{f(t)} = \widehat{f_0} \cdot \widehat{\Delta_{T_s}(t)} = \sum (\omega_s F_0(n\omega_s) \cdot \delta(\omega - n\omega_s)).$$

注记: 时域周期对应频域离散。

抽样定理证明***:抽样函数的周期谱



- 数学表示: $f_s(t) = f(t) \cdot \Delta_{T_s}(t)$
- 卷积公式: $\widehat{f_s}(t) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(t) * \widehat{\Delta_{T_s}}(t)$
- 周期谱 $F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum F(\omega - n\omega_s)$.
 $F(\omega) = \widehat{f}$.
- 信号理想恢复: 可以直接用频率域上方波相乘, 再傅立叶逆变换。
- 一般情况: 使用低通滤波器直接得到信号。
- 有其他的抽样方法(矩形抽样定理, 频率抽样定理).

MATLAB 编程：信号的生成和显示

信号生成：

- 时间抽样信号： $t = \text{linspace}(-\pi, \pi, 1001)$
- 一般函数信号： $\sin(t)$...
- 一般周期： $\text{square}()$, $\text{sawtooth}()$, $\text{gauspuls}()$, $\text{chirp}()$
- 特殊信号： 冲激信号 $\text{pulstran}()$, 抽样信号 $\text{sinc}()$;

信号表示

- 时间域： $\text{plot}(t, x(t))$
- 频率域： $y = \text{fft}(x)$; $y = \text{fftshift}(y)$;
可以画 $\text{abs}(y)$, $\text{real}(y)$, $\text{imag}(y)$;
- 周期谱图： $\text{periodogram}(x)$;
- 光谱图： $\text{spectrogram}(x)$;

本章深入学习问题

附上相关问题以便课程期末报告选择:

- L^2 空间的其他正交基;
- Gibbs现象(数学解释及高维情形)
- δ 函数的严格定义及其在微分方程中的应用(Green 函数);
- Poisson 和公式及其应用;
- 海森堡测不准定理;