第九次作业参考答案

2.**解**：列表 从而得

$\max(X_1,X_2)$	-1	0	1	2	1	1	1	2
X_1X_2	2	0	-1	-2	-2	0	1	2
(X_1,X_2)	(-1,-2)	(-1,0)	(-1,1)	(-1,2)	(1,-2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
P	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1

(1)$X=X_1X_2$的分布律为

X	-2	-1	0	1	2
P	0.3	0.1	0.3	0.1	0.2

(2)$Y=max(X_1,X_2)$

Y	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.4	0.3

15.**解**：随机变量X与Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2\lambda e^{-\lambda y}, & 0\le x\le \frac{1}{2}, y>0\\ 0, & else\end{cases}$$

$Z=X+Y$的概率密度为$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$,
当$z<0$时，
$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}f_X(x)f_Y(z-x)dx+\int_{z}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=0$;

当$0\le z\le\frac{1}{2}$时，
$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}f_X(x)f_Y(z-x)dx+\int_{0}^{z}f_X(x)f_Y(z-x)dx+\int_{z}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=0=\int_0^z 2\lambda e^{-\lambda(z-x)}dx=2\lambda e^{-\lambda(z-x)}|_0^z=2(1-e^{-\lambda z})$;

当$z>\frac{1}{2}$时，
$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}f_X(x)f_Y(z-x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}f_X(x)f_Y(z-x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=0=\int_0^{\frac{1}{2}} 2\lambda e^{-\lambda(z-x)}dx=2\lambda e^{-\lambda(z-x)}|_0^{\frac{1}{2}}=2e^{-\lambda z}(e^{\frac{\lambda}{2}}-1)$,

故$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2(1-e^{-\lambda z}) & 0\le x\le \frac{1}{2}, y>0\\ 2e^{-\lambda z}(e^{\frac{\lambda}{2}}-1), & z>\frac{1}{2}\\ 0, & z<0\end{cases}$$

16.**解**：根据题设条件知，R_1和R_2的联合概率密度为

$$f(r_1,r_2)=f_{R_1}(r_1)f_{R_2}(r_2)=\begin{cases}\frac{10-r_1}{50}\frac{10-r_2}{50}, & 0\le r_1<10, 0<r_2<10\\ 0, & else\end{cases}$$

$R=R_1+R_2$的概率密度为$f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(r_1,r-r_1)dr_1=\int_{-\infty}^{r}f(r_1,r-r_1)dr_1+\int_{r}^{+\infty}f(r_1,r-r_1)dr_1=0;$
当$0<r<10$时，
$f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(r_1,r-r_1)dr_1=\int_{-\infty}^{0}f(r_1,r-r_1)dr_1+\int_{0}^{r}f(r_1,r-r_1)dr_1+\int_{r}^{+\infty}f(r_1,r-r_1)dr_1=\int_0^r\frac{10-r_1}{50}\frac{10-(r-r_1)}{50}dr_1=\frac{1}{50^2}[(10-r)(-\frac{1}{2}(10-r_1)^2)+5r_1^2-\frac{1}{3}r_1^3]|_0^r=\frac{1}{15000}(600r-60r^2+r^3),$
当$10\le r<20$时，
$f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(r_1,r-r_1)dr_1=\int_{-\infty}^{0}f(r_1,r-r_1)dr_1+\int_{0}^{r-10}f(r_1,r-r_1)dr_1+\int_{r-10}^{10}f(r_1,r-r_1)dr_1+\int_{10}^{+\infty}f(r_1,r-r_1)dr_1=\int_{r-10}^{10}\frac{10-r_1}{50}\frac{10-(r-r_1)}{50}dr_1=\frac{1}{50^2}[(10-r)(-\frac{1}{2}(10-r_1)^2)+5r_1^2-\frac{1}{3}r_1^3]|_{r-10}^{10}=\frac{1}{15000}(8000-1200r+60r^2-r^3),$
故$R=R_1+R_2$的概率密度为

$$f_R(r)=\begin{cases}\frac{1}{15000}(600r-60r^2+r^3), & 0<r\le 10\\ \frac{1}{15000}(8000-1200r+60r^2-r^3), & 10<r\le 20\\ 0, & else\end{cases}$$

18.**解**：(1)$f_Z(z)=\int_{2x+y=z}f(x,y)dx$
当$0<z\le 2$时，
$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{4}}^{\frac{z}{2}}2x(z-2x)dx=zx^2-\frac{4}{3}x^3|_{\frac{z}{4}}^{\frac{z}{2}}=\frac{z^3}{24}$
当$2<z<4$时，
$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{4}}^{1}2xz-4x^2dx=zx^2-\frac{4}{3}x^3|_{\frac{z}{4}}^{1}=-\frac{z^3}{24}+z-\frac{4}{3}$
当z为其他值时，$f_Z(z)=0$ 故概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z^3}{24}, & 0<z\le 2\\ -\frac{z^3}{24}+z-\frac{4}{3}, & 2<r<4\\ 0, & else\end{cases}$$

(2)$f_Z(z)=\int_{x-y=z}f(x,y)dx$
当$-1<z\le 0$时，
$f_Z(z)=\int_{-z}^{1}2x(x-z)dx=-zx^2+\frac{2}{3}x^3|_{-z}^{1}=\frac{5}{3}z^3-z+\frac{2}{3}$
当$0<z<1$时，
$f_Z(z)=\int_{z}^{1}2x(x-z)dx=-zx^2+\frac{2}{3}x^3|_{z}^{1}=\frac{1}{3}z^3-z+\frac{2}{3}$

当z为其他值时，$f_Z(z)=0$ 故概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{5}{3}z^3-z+\frac{2}{3}, & -1<z\le 0\\ \frac{1}{3}z^3-z+\frac{2}{3}, & 0<z<1\\ 0, & else\end{cases}$$

19.**解**：根据题设条件知，X和Y的概率密度为
$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$
$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}\quad(-\infty<y<+\infty)$
由X和Y相互独立，得(X,Y)的概率密度为
$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$
$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X^2+Y^2\le z\}$
当$z<0$时，$F_Z(z)=P\{\varnothing\}=0;$
当$z=0$时，$F_Z(z)=P\{X^2+Y^2\le 0\}=P\{X=0,Y=0\}=0;$
当$z>0$时，$F_Z(z)=\int\int_{x^2+y^2\le z}f(x,y)dxdy=\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rd\theta dr=1-e^{-\frac{z}{2}}$
于是$Z=X^2+Y^2$的概率密度为

$$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z>0\\ 0, & else\end{cases}$$

26.**解**：$Z=max(X,Y)$的分布函数为
$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{max(X,Y)\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=\int\int_{x\le z,y\le z}f(x,y)dxdy$
当$z=0$时，$F_Z(z)=0;$
当$0\le z\le 1$时，$F_Z(z)=\int_0^z dy\int_{-y}^{y}\frac{3}{2}(x+y)dx=\int_0^z 3y^2dy=y^3|_0^z=z^3;$
当$z>1$时，$F_Z(z)=\int_0^1 dy\int_{-y}^{y}\frac{3}{2}(x+y)dx=\int_0^1 3y^2dy=y^3|_0^1=1,$
即

$$f_Z(z)=\begin{cases}z^3, & 0\le z\le 1\\ 1, & z>1\\ 0, & z<0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\begin{cases}3z^2, & 0\le z\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

28.**解**：根据题意，X_1,X_2,X_3相互独立，$X_i(i=1,2,3)$的分布函数为

$$F_{X_i}(x_i)=\int_{-\infty}^{x_i}f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-\lambda x_i}, & x_i>0\\ 0, & else\end{cases}$$

(1)X_1,X_2相互独立，则$Y_1=max(X_1,X_2)$的分布函数为

$$F_{Y_1}(y_1)=F_{X_1}(y_1)F_{X_2}(y_1)=\begin{cases}(1-e^{-\lambda y_1})^2, & y_1>0\\ 0, & y_1\le 0\end{cases}$$

$Y_1=max(X_1,X_2)$的概率密度为

$$f_{Y_1}(y_1)=\begin{cases}2(1-e^{-\lambda y_1})\lambda e^{-\lambda y_1}, & y_1>0\\ 0, & y_1\le 0\end{cases}$$

(2)Y_2的概率密度为

$$f_{Y_2}(y_2)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y_2}, & y_2>0\\ 0, & y_2\le 0\end{cases}$$

Y_1,Y_2相互独立，(Y_1,Y_2)的概率密度为$f(y_1,y_2)=f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$,
$X=Y_1+Y_2$的概率密度为$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y_1,x-y_1)dy_1$
当$x\le 0$时，
$f_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(y_1,x-y_1)dy_1+\int_{x}^{+\infty}f(y_1,x-y_1)dy_1=0$
当$x>0$时，
$f_X(x)=\int_{-\infty}^{0}f(y_1,x-y_1)dy_1+\int_{0}^{x}f(y_1,x-y_1)dy_1+\int_{x}^{+\infty}f(y_1,x-y_1)dy_1=\int_{0}^{x}f(y_1,x-y_1)dy_1=2\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x+e^{\mu}-\lambda x-1)$,
故

$$f_X(x)=\begin{cases}2\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x+e^{-\lambda x}-1), & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

31.**解**：由题设条件知，Y_1,Y_2相互独立，且Y_1,Y_2服从正态分布，则
$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2),\mu_i=\mu,\sigma_i^2=\sigma^2\quad(i=1,2,3,4)$
$\mu_1+\mu_2-2\mu=\mu+\mu-2\mu=0,\sigma_1^2+\sigma_2^2=2\sigma^2$
$\mu_3-\mu_4=0,\sigma_3^2+\sigma_4^2=2\sigma^2$
所以，$f_{Y_1}(y_1)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_1^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}},f_{Y_2}(y_2)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_2^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}}$
于是，Y_1与Y_2的联合概率密度为
$f(y_1,y_2)=f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)=\frac{1}{4\pi\sigma^2}e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{4\sigma^2}}\quad(-\infty<y_1<+\infty,-\infty<y_2<+\infty)$