

数字信号与图像处理 aka 信号处理的数学导引 The Mathematical Tour of Signal Processing

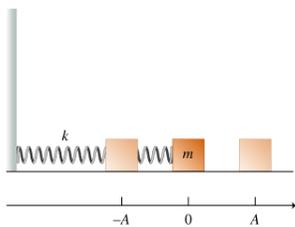
张思容

zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院, 北京航空航天大学
School of Mathematics and Systems Science, Beihang University

March 29, 2013

简单调和振动



- Hooke定理: $F = -ku$
- Newton定理: $F = ma = m\ddot{u}$
- 方程 $m\ddot{u} = -ku$
- 解: $u(t) = A\cos(ct - \phi)$, 称其中 $c = \sqrt{k/m}$ 为频率, A 为振幅, ϕ 为相位。
- A 和 ϕ 由初值决定。
- 有外力 f 的振动方程求解? $m\ddot{u} + ku = f$ 参考非齐次线性方程求解(齐次解+特解)。
- 一条线上多个节点的简单振动? 产生类似冲浪的效果: 水上下振动, 人平行波动。

Chapter 2: 信号与系统的数学表示 Representation of signals and systems

- 1 理想信号: 傅立叶王国 Fourier Kingdom
- 2 有限能量的理想信号空间
 - Hilbert 空间
 - 常见数学信号
- 3 系统与变换
 - 系统和算子
 - 傅立叶变换
- 4 离散傅立叶变换和FFT
 - 离散傅立叶变换DFT
 - FFT
- 5 卷积与相关函数
 - 卷积与LTI系统
 - 相关函数与随机信号模型

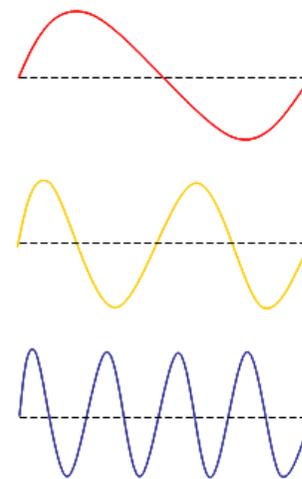
阅读章节: 清华教材 1.1-1.8;

参考书: Elias Stein, 傅立叶分析导论.

曹旭东等: 离散随机信号处理, 清华大学出版社。

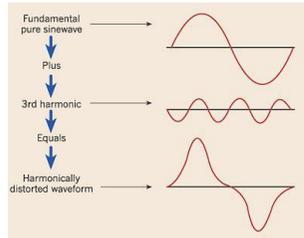
张旭东等: 离散随机信号处理, 清华大学出版社。2005

一维波方程



- 声音: 是声带振动, 压迫空气振动, 产生的波。空气是媒介!
- 物理定律: Newton定理: $F = ma = \rho h \ddot{y}(t)$
- 方程 $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, 简化可取 $\rho/\tau = 1$; ***解一: D'Alembert
 $u(x, t) = F(x + t) + G(x - t)$.
- 解二: 分离变量 $u = \mu(t)\nu(x)$,
 $\frac{\ddot{\mu}(t)}{\mu(t)} = \frac{\ddot{\nu}(x)}{\nu(x)} = \lambda$
 $\ddot{\mu}(t) - \lambda\mu(t) = 0, \ddot{\nu}(x) - \lambda\nu(x) = 0$
 $u(x, t) = (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx,$
 $\lambda = m^2$.
- 左图: $m = 1$ 基调 fundamental tone, $m = 2$ 第一overtone(第二harmonic), ...

波的叠加与傅立叶级数



- $[0, \pi]$ 上波动方程的一般解: $u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx$. 简化假设 $u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0$.
- 初值条件: 设波的起始状态 $u(x, 0) = f(x)$, 存在解 $\leftrightarrow f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$
存在解的必要条件 $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$.
- 推广到 $[-\pi, \pi]$, 奇函数
 $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$, 偶函数
 $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos mx$,
- 任一函数 $F(x) = f(x) + g(x)$, 是否 $F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}$?
注: 引入 e^{ix} 是为了简化表示, 本质还是实函数。

傅立叶的远见:

Joseph Fourier(1768-1830)



Question:

任意一个连续或不连续的函数(信号)是否可以表示为一列连续(光滑三角)函数的和?

Answer:

D'Alembert, Euler: 不一定!
J.Fourier: 一定! 数学不严密。

Remark

Joseph Fourier: 参与拿破仑的埃及远征; 发现温室效应。

周期函数的傅立叶级数

Definition

给定 f 是 $[a, b]$ 上可积函数, $L = b - a$, 则

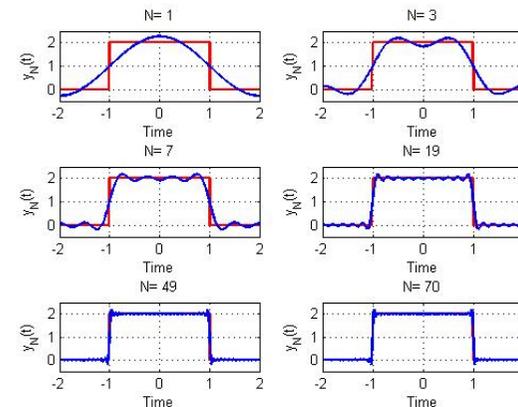
f 的第 n 个傅立叶系数为 $\hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx$

f 的傅立叶级数为 $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x / L}$

相关问题:

- ① 任一信号都有傅立叶级数吗? L^2 空间可以。
- ② 任一函数是信号吗? $f(x) = x^2$? 声音听不出来; 请考察。
- ③ 傅立叶级数可以很好逼近信号吗? 仅仅对连续信号。
傅立叶分析的重要缺陷: Gibbs现象, 在间断点处, 傅立叶级数永远不可能逼近期望值; 大约上下各0.09的误差。
经典例子: 方波 $SW(t) = 4/\pi(\sin t + \sin 3t/3 + \sin 5t/5 + \dots)$

Gibbs 现象



信号和傅立叶级数的关系

主要问题:傅立叶级数的收敛问题

记部分和 $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{i2\pi nx/L}$. $S_N(x)$ 在怎样意义下收敛到 $f(x)$?

前提: 傅立叶系数有意义要求 f 是绝对可积!

收敛性: (与函数可微性有关)Why?

- ① 点点收敛。Dirichlet条件: L^1 ,有限间断点,有限极值。
- ② 平方可积收敛 L^2 。当 $N \rightarrow \infty$, $\int_a^b |S_N(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$.
- ③ 一致收敛(uniformly): 如果 f 是两次连续可微, 利用 $\hat{f}'(n) = \pi n \hat{f}(n)$, $S_N(x) \Rightarrow f(x)$.

唯一性: $f(x)$ 连续, 且 $\forall n, \hat{f}(n) = 0$, 则 $f \equiv 0$.

历史笔记

Lennart Carleson(1928-)



Theorem (点收敛, Carleson 1966)

任意一个平方可积函数(L^2)的傅立叶级数几乎处处收敛。

- Richard Hunt推广到 $L^p, p > 1$.
- Kolmogorov(1903-1987)构造一个绝对可积(1924)函数的傅立叶级数处处不收敛。
- Kahane,Katznelson: 任一零测度集, 存在一个连续函数在上面的傅立叶级数处处不收敛。

信号的空间

主要问题: 物理理想信号的数学对象?

- 线性空间 V : 无穷维 $C(a, b)$
存在线性无关基(Hamel basis)
- 线性赋范空间: $|v|$ 满足三角不等式; l^p, L^p ;
完备的线性赋范空间: Banach 空间
- 线性内积空间: $\langle V, W \rangle$ (正定矩阵), 比如 l^2, L^2 ;
完备的线性内积空间: (可数基) Hilbert空间;
存在可数正交基;

Hilbert空间与积

Definition (积: $\langle x, y \rangle$)

满足

- ① $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ② $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- ③ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $\langle x + y, w \rangle = \langle x, w \rangle + \langle y, w \rangle$

诱导范数: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Hilbert空间:线性积空间且范数定义的极限是完备的(巴拿赫空间)。

Definition (正交基)

Hilbert空间的一组基 e_i 称为正交基: 如果满足 $\|e_i\| = 1, \langle e_i, e_j \rangle = 0$.

柯西许瓦茨不等式

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

能量有限的信号空间: L^2, l_2

能量有限的信号: $E(f) = \int f(x)^2 dx < \infty, f(x) \in L^2$.
或者离散信号 $E(f(n)) = \sum f(n)^2, f(n) \in l^2$.

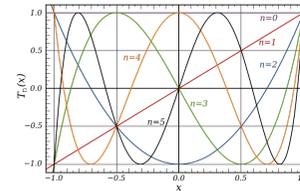
Theorem (L^2 的正交基)

$e_n(x) = e^{inx}$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 的一组正交基,
且傅立叶级数是最佳逼近 $\|f - S_N(f)\| \leq \|f - \sum_n c_n e_n\|$
特别它是完备正交基。(存在一致逼近)

Theorem (平方可积收敛)

$f \in L^1(a, b)$, 当 $N \rightarrow \infty$, $\int_a^b |S_N(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$.
有 Parseval 等式 $\sum_n |\hat{f}_n|^2 = \|f\|^2$.
特别有 Riemann-Lebesgue 定理: $|n| \rightarrow \infty, \hat{f}(n) \rightarrow 0$.

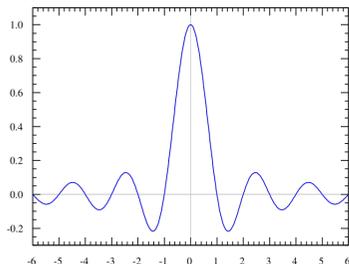
注记: 一般考察 Hilbert 空间有可数个完备正交基, 是有限维欧几里德空间的最佳推广。

 L^2 的正交基

- 多项式基正交化: $t^i : i = 1, 2, \dots \rightarrow$ Legendre 多项式 $\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$.
- (左边图)切比雪夫多项式 Chebyshev $T_n(t) = \cos(n \arccos t), n = 0, 1, 2, \dots - 1 \leq t \leq 1$
- Bessel 函数: 来源于二维对称振动方程(鼓). $r^2 B'' + rB' + \lambda r^2 B = n^2 B$ 其中 $B(r)$ 的沿轴向的振动, r 是半径, λ 是鼓的频率, n 是 Bessel 函数的阶. 一般 Bessel 函数记为 $J_n(\lambda_k r)$.

典型信号

- 指数信号 $x(t) = Ae^{bt}, b \in \mathbb{C}$
周期信号: (正弦与余弦信号)
- 单位信号: 单位矩形信号 $G_1(t)$ (方波脉冲), 单位阶跃信号 $u(t)$ (方波 $(SW(t))$), 单位斜变信号 $R(t)$ (三角波)
关系: $R(t) = \int u(t)$.
- 特殊信号: 抽样信号 $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$,
MATLAB: sinc 函数。

 δ 函数

单位冲激信号的不同定义:

- 方波的导数: $\delta(t) = SW'(t) = 4/\pi(\cos t + \cos 3t + \cos 5t + \dots)$.
不收敛!
- 在一点的力: $u'' = \delta(t)$, 方程的解为 $u(t) = -R(t - a) + ct + d$;
参见: Green 函数。由不同 δ 函数的解可以得到 $u'' = f$ 的通解!
- 狄拉克定义: $\int \delta(t) dt = 1, \delta(t) = 0, t \neq 0$.
抽样特性 $\int \delta(t - t_0)x(t) = x(t_0)$.
- 线性泛函: $\delta : H \rightarrow R, \delta(f(t)) = f(0)$.
- 函数逼近: 方波脉冲的逼近; $\delta(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{G_s(t)}{s}$
高斯函数的逼近。

有限长信号空间及其运算

Definition (复 $L^2(0, 2\pi)$ 空间及三角函数基)

信号函数 $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, 记三角函数基为 e^{int} ,
积 $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, 则能量有限的信号 f 组成一个希尔伯特空间。 f 的傅立叶级数展开记为 $\sum c_k e^{ikt}$, $c_k = \langle f, e^{ikt} \rangle$.

信号的运算: 信号变换后还是信号?

- 线性运算(线性空间)
- 平移: $f(t) \rightarrow f(t-h)$; 信号延迟
- 反射: $f(t) \rightarrow f(-t)$; 信号颠倒
- 伸缩: $f(t) \rightarrow af(at)$; 信号放大;
- 乘积: $f(t)g(t)$: 信号调频;
- 微分与积分: $f(t) \rightarrow f', \int f$???
- 卷积: $f(t) * g(t)$???

LTI系统与算子

例子: 信号的传输 $y(t) = ax(t-t_0) + w(t)$. $0 < a < 1, w(t)$ 是噪音。常见系统:

- 线性系统: $H(ax + by) = aH(x) + bH(y)$
连续算子?
- 时不变系统: $H(x(t-k)) = y(t-k)$
信号处理对象 \rightarrow 线性时不变算子: LTI系统!
- 稳定系统: BIBO稳定系统 $x(t)$ 有界则 $y(t)$ 有界;
- 因果系统: $y(t_0)$ 依赖 $x(t), t \leq t_0$. 即系统不能预测。
- 例子:有限差分方程 $\sum_i a_i y(t-i) = \sum_j b_j x(t-j)$
- ***再抽样算子: $S(x(n)) = x(nP), P \in \mathbb{N}$
是否是因果系统?

信号变换与算子

一个系统 H 是一个函数空间的算子(或变换)。 $H: x(t) \rightarrow y(t)$
常见信号运算都是算子。

常见变换:

- 平移算子: $T_h(f(t)) = f(t-h)$?
- 反射算子: $R(f(t)) = f(-t)$; ?
- 伸缩算子: $S_a(f) = af(at)$; ?
- 乘积算子: $M_g(f) = f(t)g(t)$, 卷积算子: $C_g(f) = f * g$?
- 微分与积分算子: $D(f) = f', I(f) = \int f$?

正交变换

Definition (希尔伯特空间的正交变换)

定义线性变换 $A: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, 满足 $\langle Af, Ag \rangle = \langle f, g \rangle$, 即保持积不变, 称为 希尔伯特空间上的一个正交变换。

任意两组正交基的不同表示得到一个正交变换; 注: $f(t)$ 展开成傅立叶级数是 $L^2 \rightarrow l^2$ 的一个线性映射(正交?)

傅立叶变换: 非周期函数的正交变换

一般的信号非周期函数,
怎样定义 $\hat{f}(n) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx} dx$? 前提: f 在无穷大时, 应该快速收敛到零(比如 $1/x^2$).

Definition (Schwartz 空间: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)

其中的函数 f 无穷次可微且所有导数快速递减,
 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty$, for every $k, l \geq 0$.

EXAMPLE (高斯函数和bump functions)

$$K_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-\pi x^2 / \sigma}. \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x-a}} e^{-\frac{1}{b-x}}, \quad a < x < b$$

注记: \mathcal{S} 是线性空间, 对微分和多项式乘法封闭。

Schwartz 空间傅立叶变换

Definition (傅立叶变换)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Proposition

- ① 平移 $f(x+h) \rightarrow \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}$
- ② 放大 $f(\lambda x) \rightarrow \lambda^{-1} \hat{f}(\lambda^{-1} \xi)$
- ③ 微分 $f'(x) \rightarrow 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$
- ④ 卷积 $\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$

Theorem (傅立叶变换是 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的线性变换.)

若 $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则 $\hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 特别高斯函数变到本身。

Schwartz 空间傅立叶变换是正交变换

Definition (傅立叶逆变换)

记傅立叶变换 $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx$,
则傅立叶逆变换 $\mathcal{F}^*(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi$

Proposition

- ① 乘积公式 $\int_{-\infty}^{\infty} f \hat{g} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} g dt$
- ② 逆定理 $\mathcal{F}^* \mathcal{F}(f) = f$:
即 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi} dx$
- ③ Plancherel 定理: $\|\hat{f}\| = \|f\|$. $\|\cdot\|$ 为 L_2 范数。
- ④ *** Poisson 求和公式。 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi i x n}$, 特别 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$ 。

傅立叶变换: Schwartz空间到 L^2 空间*****

关键结果:

- ① Schwartz 空间在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密;
- ② 傅立叶变换 \mathcal{F} 是Schwartz 空间上的正交(可逆)变换; $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
- ③ \mathcal{F} 存在从Schwartz 空间到完备空间 $L^2(\mathbb{R})$ 的扩张。

Theorem (L^2 空间的傅立叶变换)

\mathcal{F} 给出 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个正交(等距)变换。

- ① $\hat{\hat{f}} = f$;
- ② $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
- ③ $\|f\| = \|\hat{f}\|$

注记: 可以进一步推广到广义函数(线性泛函)。

海森堡不确定原理: 傅立叶分析的局限

Theorem (海森堡不确定定理)

设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|f\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx = 1$, 有

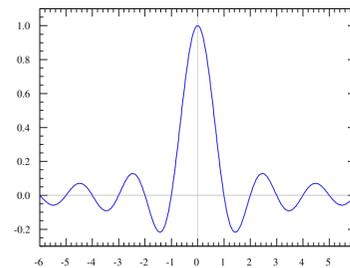
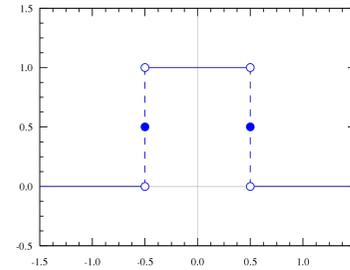
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \hat{f}^2(\xi) d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

仅当 $f(x) = Ae^{-Bx^2}, B = A^4\pi/2$ 时等号成立。

Remark (物理解释: 位置不确定性 \times 动量不确定性 $\geq \frac{h}{16\pi^2}$)

- 原子位于 $[a, b]$ 的概率为 $\int_a^b \psi^2 dx$.
- 原子的位置是期望 $x_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi^2 dx$, 位置的方差是 $\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 \psi^2 dx$
- 对应有原子的动量分布为 $\int_a^b \hat{\psi}^2 dx$ 和方差。

简单信号: 矩形波



- 作为周期函数的矩形波: $G_2(t) = 1$, 周期 $T = 2\pi$
傅立叶展
开 $G_2(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_n 2/\pi \text{Sinc}(n) \cos nt$.
- 傅立叶展开的复数形式:
 $G_2(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_n \frac{1}{\pi} \text{Sinc}(n) e^{-int}$
- 作为有限区间函数的矩形波: $G_2(t) = 1$.
傅立叶变换 $\widehat{G}_2(w) = 2\text{Sinc}(w)$.
- 特别傅立叶系数 $F_n = \widehat{G}_2(nw)/(2\pi)$

广义信号***

Remark (广义信号的傅立叶变换)

一般的 C_c^∞ 上的线性泛函称为分布 (distribution). 看作可积函数定义的泛函的推广。称为广义函数。

广义函数的傅立叶变换: 对任何函数 $x(t) \in \mathcal{S}, \langle \hat{f}, x(t) \rangle = \langle f, \widehat{x(t)} \rangle$

- 复指数信号 $x(t) = e^{-at} u(t)$
傅立叶变换 $X(w) = \frac{1}{a+iw}$
- 符号函数 $\text{sign}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at}$
傅立叶变换 $\text{SIGN}(w) = \frac{2}{iw}$.
- 单位冲激函数 $\delta(t), \widehat{\delta} = 1$
特别 $\widehat{1} = 2\pi\delta(t)$.
- 单位阶跃函数 $u(t) = 1/2 + \text{sign}(t)$,
 $\widehat{u}(t) = \pi\delta(w) + \frac{1}{iw}$.

从模拟信号到有限信号

实际应用中必然是有限的抽样信号; $x(t) \rightarrow x(n) \rightarrow x[N]$

- 抽样: 得到离散信号
- 截取: 得到有限信号
** 时间域: $x[N] = x(n) \cdot G(N)$, 其中 $G(N)$ 为长为 N 的矩形脉冲。
** 频率域: $X_N(w) = X(w) * \text{sinc}(w)$; *** 问题: 卷积产生频率泄漏。
- 有限信号的频率谱是无穷的!

从有限信号得到离散谱

- 周期延拓的信号 \rightarrow 离散谱
- 加零后周期延拓;
- 对称扩张后周期延拓; DCT

离散傅立叶变换DFT

- 有限序列 $x[n]$, 傅立叶谱 $X[k]$, 频率 $W_N = e^{-i2\pi/N}$;
- 离散傅立叶变换(DFT) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}$, $k \in [0, N-1]$
- 离散傅立叶逆变换(IDFT) $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}$
- 矩阵表示:

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

- 变换公式 $X = D_N x$, 逆变换 $x = \frac{1}{N} D_N^* X$.
矩阵是Vandemonde矩阵!

DFT性质

- 傅立叶谱 $X[k]$ 是离散的周期谱。(是单位圆上的 N 点抽样)
 N 的选取问题: $x(N)$ 的 N 点DFT与 $x(N)$ 加零后 $2N$ 点DFT差别? 一般依赖与信号的短时平稳性。
- 傅立叶变换矩阵是正交矩阵。例子 D_4
- **对称与共轭: $W_N^k = -W_N^{N/2+k}$, $W_N^N = 1$
特别实序列有: $X[N-k] = X[k]^*$
- **周期(或循环)卷积: $x[n] * y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)y(N-i)$
- **Parseval 等式。

DFT的计算

- 例子 $n = 4$: $\delta[n] = [1, 0, 0, 0]$, $\sin[\pi n] = [0, 1, 0, -1]$, $\cos[\pi n] = [1, 0, -1, 0]$, $c[n] = [1, 1, 1, 1]$.
DFT结果: $D_4(\delta) = (1, 1, 1, 1)$, $D_4(DC) = \delta$
 $D_4(\sin) = [0, 1/2i, 0, -1/2i]$.
- 注意: 序列为偶序列($x[k] = x[N-k]$)时, 傅立叶变换为实数序列。奇序列($x[k] = -x[N-k]$), 傅立叶变换为虚数数序列。特别有离散余弦变换DCT是实变换!
- MATLAB实现 $w = e^{-i2\pi/N}$, $j = 0 : N-1$; $k = j^i$; $D_N = w.^{\wedge}(k * j)$
 $D = 1/N * \text{fft}(\text{eye}(N))$;
- 计算复杂度: 计算所有变换样本要 N^2 个复数乘法, $N(N-1)$ 复数加法。即 $4N^2$ 个实数乘法, $(4N-2)N$ 实数加法;

DFT矩阵分解

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & i & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 & i^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & i^2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

一般的 $D_{2N} = \begin{bmatrix} I_N & A_N \\ I_N & -A_N \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} D_N & \\ & D_N \end{bmatrix} * [\text{even-odd permutation}]$

其中 A_N 是对角阵 $(1, w, w^2, \dots, w^N)$.

计算量: 只有 N 次对角阵计算!!! 递推有 $cN \log N$ 次运算!

注: 每个矩阵是稀疏矩阵!

FFT的实现

关键: $W_N = e^{-i2\pi/N}$, $W_{2N}^2 = W_N$, $W_{2N}^N = -1$

- 设信号为 x_k , 分解为奇偶 x_k^1, x_k^2
- 变换有 $c^1 = D_N x^1, c^2 = D_N x^2$;
- 则计算有 $c_j = c_j^1 + w^j c_j^2, 0 \leq j \leq N-1$
 $c_j = c_j^1 - w^j c_j^2, N \leq j \leq 2N-1$

MATLAB实现

$c^1 = \text{fft}(x(0 : 2 : 2N - 2)) * N$;

$c^2 = \text{fft}(x(1 : 2 : 2N - 1)) * N$;

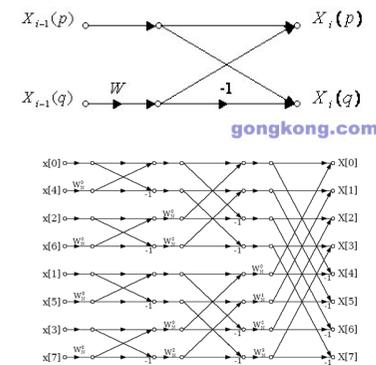
$A = w.^{\wedge}(0 : N - 1)'$;

$c = [c^1 + A .* c^2, c^1 - A .* c^2]$.

例子: D_{1024} 的分解。

注: `ifft` 类似。

不同形式的FFT



- DIT 按时间抽
取: $X[k] = P(k/2) + W_N^k S(k/2)$
Cooley-Turkey 算法(1965),
Gauss(1805);
注意: 输出的信号顺序即二进制表示的逆序!
- DIF 按频率抽取 $X[2k] = \sum(x(j) + x(j + N/2))W^{jk}$; $X[2k+1] = \sum(x(j) - x(j + N/2))W^{jk}$
- 基4的算法, 可以不用乘法!
- FFTW: 参见网站;
- 应用: 卷积计算(多项式计算);

FFT的MATLAB 演示

- 生成信号: `x=square`等
- FFT: `y=fft(x)`
注意结果为 $[0, 2\pi]$ 上等分 L 的频率点上复数值。
可用 `fftshift` 变成 $[-\pi, \pi]$ 上函数, 可用 `abs` 画图。
- `ifft, ifftshift` 类似。
- 可用 `fft(x, N)` 指定序列大小, 可以矩阵操作。

卷积

Definition (卷积与周期卷积)

给定 $f, g \in L^2$, 定义卷积 $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$;

特别如果 f, g 是周期 2π 可积函数, 则定义周期卷积

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$$

注记: 卷积即小学的多位整数乘法(不进位!)

- 卷积满足线性, 交换律, 结合律。
- $f * g$ 是连续的, 且 $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ 。
- ***微分与积分: $D(f) * I(g) = f * g$ (周期函数)
- ***傅立叶级数的收敛判定: 记部分和 $S_N(x) = (f * D_N)(x)$, $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin(2N+1)x/2}{\sin(x/2)}$
称为狄利克雷核, 还有 Fejer, Abel, Gauss 核。

(离散)LTI系统是卷积

离散卷积: $x(n) * y(n) = \sum_m x(m)y(n-m)$;

Theorem

离散线性时不变系统(LTI)是卷积系统: $y(n) = x(n) * h(n)$ $h(n)$ 是单位抽样信号 $\delta(n) = [1, 0, 0, \dots]$ 的单位冲激响应。

Outline: $x(n) = \sum x(m)\delta(n-m), \delta(n-m) \rightarrow h(n-m)$.

- 离散系统基本运算:单位延时,加法器, 放大器。
- 复杂系统: 系统的并联(响应函数加法), 串联(响应函数卷积复合);
- LTI因果系统当且仅当 $h(n)$ 是因果序列
- LTI稳定当且仅当 $\sum |h(n)| < +\infty$

一般模型(ARMA): 可以看成是一个常系数差分方程
 $\sum b_i y(n-i) = \sum a_j x(n-j)$.

LTI系统系统的分类

一般经典信号系统主要应用于频率的处理, 称为模拟滤波器。

分类:低通(lowpass),高通(highpass),带通(bandpass),带阻(bandstop),全通(allpass)等

- 按幅度响应分类: 理想滤波函数: 低通, 高通, 带通, 带阻;
有界实传递函数BR: $|H(e^{i\omega})| \leq 1$, 特别无损系统如果能量不变。
全通传递函数: $|H(e^{i\omega})| = 1$
- 按相位响应分类:
零相位传递函数: $\theta(\omega) = 0$ 不存在零相位因果滤波器。
线性相位传递函数: $H(e^{i\omega}) = e^{-i\omega D}$, 群延迟 $\tau(\omega) = D$
***最小最大相位传递函数: 所有零点 $|\xi_k| < 1$ 称为最小相位; 反之最大相位; 不一定则是混合相位;
- 对有理传递函数 $H(z) = N(z)/D(z)$,按响应项数分类;
FIR:有限冲激响应 $D(z) = 1$, $h(n)$ 有限项; 又称为全零点滤波器;
IIR:无穷冲激响应 $D(z) \neq 1$, $h(n)$ 无限项; 又称为递归滤波器;

离散LTI系统的频率响应

L^2 有很多正交基, 对应的有不同的正交分解, 为什么用三角函数基? 为什么用傅立叶变换?

Theorem (LTI系统特征向量)

三角函数基是所有线性时不变系统 \mathcal{H} 的公共特征向量。

- 离散三角函数是序列 $x(n) = e^{i\omega n} = (\dots, 1, e^{i\omega}, e^{i2\omega}, \dots)$;
- 三角函数的信号响
应: $y(n) = h(n) * x(n) = \sum h(k)e^{-i\omega k} e^{i\omega n} = H(e^{i\omega})x(n)$
- 特征值: $H(e^{i\omega}) = \sum h(k)e^{-i\omega k}$ 称为频率响应;
- $H(e^{i\omega})$ 是 $h(n)$ 的傅立叶变换(DTFT);
即系统在频率域满足 $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$.

常见有理系统: $\sum b_i y(n-i) = \sum a_j x(n-j)$,
频率响应: $H(e^{i\omega})$, 幅度响应 $|H(e^{i\omega})|$, 相位响应 $\theta(\omega) = \arg H(e^{i\omega})$

连续信号LTI系统的模型***

Remark

傅立叶王国: 一般的能量信号可以看成 $L^2(0, 2\pi)$ 或 $L^2(R)$ 的函数。更广义的:能量信号属于一个Hilbert空间。

线性时不变系统(LTI):是Hilbert空间的一个线性算子且与平移算子可交换。

Theorem (LTI系统基本结论)

线性时不变系统 \mathcal{H} 完全由单位冲激信号 $\delta(t)$ 的冲激响应 $h(t)$ 决定。
且 $\mathcal{H}(x(t)) = h(t) * x(t)$ 。(所有LTI是个卷积系统)。

L^2 有很多正交基, 对应的有不同的正交分解, 为什么用三角函数基? 为什么用傅立叶变换?

Theorem (LTI系统特征向量)

三角函数基是所有线性时不变系统 \mathcal{H} 的公共特征向量。

单位冲激信号与LTI系统的卷积解释***

- δ_0 是一个线性泛函(可能无界!)。 $\langle \delta_0, x(t) \rangle = x(0)$
是否有Riesz表示定理? $\langle \delta_0, x(t) \rangle = \langle z(t), x(t) \rangle$
- 一般的函数表示有 $x(t) = \langle \delta_{t-s}, x(s) \rangle$.
- 记 $\mathcal{H}(x(t)) = y(t)$, 则 $y(t) = \mathcal{H}(\langle \delta_{t-s}, x(s) \rangle) = \langle \mathcal{H}(\delta_{t-s}), x(s) \rangle$
- 一般的可以定义 $\langle \mathcal{H}(\delta), x(t) \rangle = \langle \delta, \mathcal{H}(x(t)) \rangle$
假设 $\mathcal{H}(\delta)$ 是有界泛函!, 由Riesz表示定理。 $\langle \mathcal{H}(\delta), x(t) \rangle = \langle h(t), x(t) \rangle$.
- 设 $T_s(x(t)) = x(t-s)$, 则 $H \circ T_s = T_s \circ H$.
特别 $y(t) = \langle T_s(h(t)), x(s) \rangle = \langle h(t-s), x(s) \rangle = h(t) * x(t)$.

Remark

一般的 $\delta(t)$ 看成广义函数(distribution),可以求导,积分等。

指数函数是所有LTI系统的特征向量***

Theorem (有界正规算子的谱)

*Hilbert*空间上可以互相交换的对称(正规)算子族(至少存在一个有界算子)存在共同的特征向量。

正规算子(normal operator): $N \circ N^* = N^* \circ N$ 其中 $\langle Nx, y \rangle = \langle x, N^*y \rangle$ 。

Corollary

所有的LTI系统是卷积系统.卷积可以交换,且与平移算子 T_s 可交换,所以存在一组共同的特征向量。特别有 $h(t) * e^{ist} = H(s)e^{ist}$ 。

- 卷积算子可交换 $h_1 * h_2 * x = h_2 * h_1 * x$
- 卷积与平移算子 T_s 可交换;
- 满足 $h * e = \lambda e$, $T_s(e) = t_s e$, 仅有指数函数满足该方程!
- 直接验证 $h(t) * e^{ist} = H(s)e^{ist}$ 。

真实世界的信号处理

真实信号=理想信号+噪音信号= $x(t) + e(t) \rightarrow h(n) \rightarrow x(t)$ 恢复信号

- 真实信号: 包含不确定性, 不可完全预期其值。
信号表示: (离散)随机过程。含时间变量的随机变量 $x(t, \xi)$
理想信号: 函数空间表示; L^2
噪音信号: 最简单是白噪音随机过程(完全不可预期);
常见噪音: 电线交流电噪音60赫兹, 图像的椒盐噪音等等;
- 统计信号处理: 信号的平均的统计特征是确定的,可以利用数据统计量估计信号的统计特征。
主要内容: 信号分析(谱估计)
信号滤波(线性滤波Wiener滤波器, 最小二乘, 自适应滤波, Kalman滤波)。
应用: 语音处理, 去噪, 信号预测, 识别等。

离散随机信号

Definition (离散随机过程)

给定样本空间 $X = \{\xi_k\}$,取一系列数 $x(n, \xi_k)$ 称为离散随机过程或离散随机序列。

固定 n , $x(n, \xi_k)$ 是一个随机变量; 固定 ξ_k , $x(n, \xi_k)$ 是一个样本序列;

Proposition (描述)

- 联合概率分布: $F(x_1, \dots, x_M; n_1, \dots, n_m) = Pr(x(n_i) \leq x_i, 1 \leq i \leq M)$
- 统计特征: $\mu(n) = E(x(n)), \sigma(n)$;
- 自相关矩阵: $r(n_1, n_2) = E(x(n_1)x(n_2))$
自协方差矩阵: $\gamma(n_1, n_2) = r(n_1, n_2) - \mu(n_1)\mu(n_2)$

IID: 互相独立的随机过程; 不相关过程; 正交过程; 周期过程;

平稳随机信号***

随机过程 $x(n)$ 与 $x(n+k)$ 的统计量相同。

Definition (SSS严格平稳信号)

如果联合分布密度函数满足: 任何 k 成立

$$f(x_1, \dots, x_M; n_1, \dots, n_m) = f(x_1, \dots, x_M; n_1+k, \dots, n_m+k)$$

p 阶矩平稳(与时间无关), 一般 $p = 2$

Definition (WSS宽平稳信号)

随机信号满足,

- ① $\mu(n) = \mu_x$
- ② $\text{var}(x(n)) = \sigma_x^2$
- ③ $r_x(n_1, n_2) = r(|n_1 - n_2|) = r(k)$, 称为自相关序列。

信号的相关函数

- 内积与相关系数: $\rho_{xy} = \langle x, y \rangle / |x||y|$
相关系数: $\rho_{xy} = \sum x(k)y(k) / |x||y|$.
- 相关函数: $r_{xy}(k) = \sum x(n)y(n+k)$
特别有自相关序列 $r_{xx}(k)$.
- 例子: 指数函数, 三角函数的自相关函数还是指数序列。
- 相关函数是卷积: $r_{xy} = x(-m) * y(m)$

Proposition

- $r_x(0) \geq r_x(k)$
- $r_x(k) = r_x^*(-k)$
- $\lim_k r_x(k) = 0$, 能量信号。
- 非负定**** $\sum_k \sum_m a_k r(k-m) a_m^* \geq 0$

功率谱

Definition (功率谱密度)

已知随机信号 $x(n)$ 的自相关序列 $r(k)$, 定义随机过程的功率谱PSD:

$S(e^{i\omega})$ 为 $r(k)$ 的(离散时间)傅立叶变换。称为功率谱密度。

有离散时间傅立叶逆变换可以得到 $r(k)$ 。

***Z变换: $S(z) = \sum_n r(k)z^{-k}$

注记: 一般信号的离散时间傅立叶变换(频率谱)是随机非平稳的白噪声!

Proposition

- 功率谱密度周期为 2π 的实函数;
- 非负定 $S(e^{i\omega}) \geq 0$
- 信号的平均功率: $P(x[n]) = E(x^2[n]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{i\omega}) d\omega$

白噪声: $w(n) \sim WN(\mu, \sigma^2)$
 $r(k) = \sigma^2 \delta(k)$, $S(e^{i\omega}) = \sigma^2$.

MATLAB 编程: 信号的生成和显示

信号生成:

- 时间抽样信号: $t = \text{linspace}(-\pi, \pi, 1001)$
- 一般函数信号: $\text{sin}(t)$...
- 一般周期: $\text{square}()$, $\text{sawtooth}()$, $\text{gauspuls}()$, $\text{chirp}()$
- 特殊信号: 冲激信号 $\text{pulstran}()$, 抽样信号 $\text{sinc}()$;

信号表示

- 时间域: $\text{plot}(t, x(t))$
- 频率域: $y = \text{fft}(x)$; $y = \text{fftshift}(y)$;
可以画 $\text{abs}(y)$, $\text{real}(y)$, $\text{imag}(y)$;
- 周期谱图: $\text{periodogram}(x)$;
- 光谱图: $\text{spectrogram}(x)$;

本章深入学习问题

附上相关问题以便课程期末报告选择:

- L^2 空间的其他正交基;
- Gibbs现象(数学解释及高维情形)
- δ 函数的严格定义及其在微分方程中的应用(Green 函数);
- Schwarz空间上的傅立叶逆定理(傅立叶变换的逆变换是其本身).
- 海森堡测不准定理;
- 常见模拟滤波器的实现;