EXERCISE TWO

11/28 课堂交。 注(***)部分是选做.

1. (内积)定义内积ρ是$V \times V \to R$向量空间上的双线性函数，且满足对称性($\rho(x,y)=\rho(y,x)$)和正定性($\rho(x,x)\geq 0$,等号仅当$x=0$成立)。
   (a) 验证R^n中的标准内积(点乘)是内积;
   (b) 任意正定矩阵A,定义$< v,w >= v^\tau Aw$,验证其为一个内积;
   特别设任意一个基到标准正交基的变换矩阵为M,则$A=MM^\tau$是正定矩阵。
   (c) 验证:任意$m\times n$维矩阵$M(m,n)$,可以定义$< A,B >= trace(A^\tau B)$为一个内积。

2. （环面)给出环面的一个参数卡表示
   $X(u,v)=((a+r\cos u)\cos v,(a+r\cos u)\sin v, r\sin u)$;
   其中$0<u<2\pi, 0<v<2\pi, 0<r<a$. （注：坐标卡不包含全部曲面)
   (a) 把环面看成嵌入R^3中子流形，计算$\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}$, 计算诱导黎曼度量$g_{ij}$并写成度量形式(第一基本形式);
   (b) 计算参数曲线$u=\pi$和曲线$v=\pi$的长度，求出曲线在交点处的夹角.($\cos\theta =< u',v' > /|u'||v'|$.)
   (c) 计算环面的面积$=4\pi^2 ra$.(积分区域取极限即可)

3. （流形的体积)
   (a) （教材例2.2.4）利用球面到R^4的浸入，给出球面的一个诱导度量，并利用它计算单位球面的面积4π。
   (b) （教材练习2.1）计算S^3的体积。***计算一般情形的S^n的体积。
   (c) （教材练习2.2）计算Poincare圆盘中的一个半径为$r<1$的小开圆盘的体积。

4. (黎曼联络)
   (a) 计算习题2中环面的黎曼联络;
   (b) 计算单位球面S^2的黎曼联络；（可以用任一个度量形式);
   (c) ***计算Poincare圆盘的黎曼联络。

5. (紧李群) $SO(2)$是2×2维行列式为1的正交矩阵;
   (a) 验证其为李群;
   (b) 验证其李代数即单位元的切空间是$so(2)=\{X+X^\tau=0\}$,即反对称的2阶矩阵(注：维数为1).
   (c) 验证习题1中的$trace(X^\tau Y)$给出一个黎曼度量，***且是李群的双不变度量。(满足$<X,[Y,Z]>=<[X,Y],Z>$）;
   (d) 计算该度量对应的黎曼联络;
   (e) 已知$[X,Y]=XY-YX$(乘法为矩阵乘法), 计算李群的结构常数，验证: $\nabla_X Y=[X,Y]/2$.
6. (平行移动)
   (a) 给出环面沿参数曲线$u=\pi$和曲线$v=\pi$的向量平行移动的方程,点P为两条曲线的交点，向量$V=(1,0,0)$; 说明其解。
   (b) 给出单位球面沿大圆(不妨设为$x^2+y^2=1,z=0$)的向量平行移动的方程，点$P=(1,0,0)$,向量$V=(0,1,0)$. 说明其解。
   (c) 利用欧氏空间中共变导数的定义：$\frac{DV}{dt}=\frac{dV}{dt}$在切平面上的投影。 给出以上平行移动方程。验证它们是一样的。
   (d) ***考察单位球面上一个向量从极点出发沿不同大圆到达对径点的平行移动，是否得到相同的向量?
7. (仿射联络)
   (a) 证明：挠张量$\tau(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$是反对称张量（即验证满足P45性质1，2，3.)
   (b) 证明：联络是无挠的当且仅当$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$.
   (c) 证明：P46 公式(3.3)定义的联络是一个黎曼联络。
8. (***思考题:建议了解.)
   (a) ***微分流形上存在无穷多个度量。
   (b) ***Lobatchevski上半平面和Poincare圆盘是等距的。
   (c) ***证明：给定黎曼联络，沿r平行移动$P_{ab}:T_{r(a)}M\to T_{r(b)}M$给出一个切空间的等距变换。
   (d) ***P49练习2.1，浸入子流形可以定义诱导联络$\nabla_X Y=\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}-B(X,Y)$.验证$\nabla$是联络，$B$是双线性函数。